Reciproka ekvationer.

Af Frans de Brun.

Som bekant brukar man lösa synmetriska ekvationer af 4:de graden,

$$x^4+px^3+qx^2+px+1=0\,, \tag{1}$$

genom att dividera med x^2 och lösa i afseende på

$$y=x+\frac{1}{x}\,. \tag{2}$$

Om emellertid diskriminanten till y—ekv., p^2+8-4q, blir negativ, är det tydligt, att de x-värden, som då formellt erhållas vid lösandet af (2),

$$x=\frac{y}{2}\pm\sqrt{\frac{y^2}{4}-1}\,, \tag{3}$$

komma att innehålla kvadratrötter ur imagära tal. Att sedan förenkla dem till formen $\alpha+i\beta$ kräfver ganska besvärliga räkningar. För detta fall skulle man möjligen med fördel kunna använda följande metod.

Först är att märka, att, om en af rötterna till en synmetrisk ekv. är imaginär med absoluta beloppet olika enheten,

$$x_1=\alpha+i\beta\,, \tag{4}$$

måste det finnas ännu tre imaginära rötter:

$$x^2=\alpha-i\beta\,,\ x_3=\frac{\alpha-i\beta}{\alpha^2+\beta^2}\,,\ x_4=\frac{x+i\beta}{\alpha^2+\beta^2}\,. \tag{4}$$

Vi frånse i det följande det ointressanta specialfallet och antaga

$$|\alpha+i\beta|\gtrless 1\,. \tag{5}$$

Vid den vanliga lösningsmetoden kombinerar man de reciproka rötterna, således x_1 med x_3 och x_2 med x_4. Nu vilja vi i stället sammanföra konjugatkomplexerna d. v. s. x_1 med x_2 och x_3 med x_4. Vi bestämma alltså fyra konstanter, a, b, c, d, genom identiteten

$$x^4+p\,x^3+q\,x^2+p\,x+1=(x^2+a\,x+b)\;(x^2+c\,x+d)\,, \tag{6}$$

hvaraf

$$a+c=p\,,\quad ac+b+d=q\,,\quad ad+bc=p\,,\quad bd=1\,. \tag{7}$$

Den 1:sta och 3.dje gifva

$$a(d-1)=c(1-b),$$

som, med hjälp af den 4:de leder till

$$b=\frac{a}{c}\,,\;d=\frac{c}{a}\,. \tag{8}$$

Lösningen $b=1$ tillhör naturligtvis den förut gifna metoden och frånses här. Om värdena på b och d ur (8) införas i den andra ekv. (7), erhålles, efter multiplikation med ac,

$$a^2+a^2c^2+c^2=qac\,,$$

som kombinerad med den första, efter dess kvadrering, gifver

$$a^2\,c^2-2\,ac=qac-p^2.$$

Alltså har man

$$\left.\begin{aligned} ac&=1+\frac{q}{2}-\sqrt{1+q+\frac{q^2}{4}-p^2}\\ a+c&=p\,. \end{aligned}\right| \tag{9}$$

Uttrycket under rotmärket blir under det gjorda antagandet,

$$p^2+8-4\,q<0\,,$$

tydligen större än

$$1+q+\frac{q^2}{4}-4\,p+8=\left(\frac{p}{2}-3\right)^2,$$

och således blifva såväl ac som $a+c$ reella. Men äfven a och c själfva blifva reella, om minustecket tages framför roten ur $1+q+\frac{q^2}{4}-p^2$ i (9); plustecken åter leder till kombinationen x_1 med x_3 och x_4 med x_2, då koefficienterna blifva imaginära. Af (6) erhållas sedan rötterna

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{-ac+i\sqrt{ac\,(4-ac)}}{2c} \\ x_2 &= \frac{-ac-i\sqrt{ac\,(4-ac)}}{2c} \\ x_3 &= \frac{-ac-i\sqrt{ac\,(4-ac)}}{2a} \\ x_4 &= \frac{-ac+i\sqrt{ac\,(4-ac)}}{2a} \end{aligned}\right\} . \tag{11}$$

Det behöfver väl knappast sägas, att denna lösningsmetod äfven kan användas, då reella rötter finnas.

Eftersom man af en reciprok 4:de grads ekv. dels kan få rötterna som kvadratrötter ur imaginära tal, dels under formen $\alpha+i\beta$, är det klart, att man omvändt med hjälp häraf kan draga ut kvadratroten ur imaginära tal. Också använder man som bekant en dylik metod härför (äfvensom för förenklande af dubbla radikaluttryck). Om man antager $p=0$ och inför $\frac{y}{\sqrt{m}}$ i stället för x, blir ekv.

$$y^4+ky^2+m^2=0$$

$$\therefore\ (y^2+m)^2=(2m-k)y^2 \tag{12}$$

$$\therefore\ y^2+m=\pm\sqrt{2m-k}\,.\,y$$

$$\therefore\ y=\pm\frac{\sqrt{2m-k}}{2}\pm\frac{\sqrt{-2m-k}}{2}=\pm\frac{\sqrt{2m-k}}{2}\pm\frac{i\sqrt{2m+k}}{2}\cdot \tag{13}$$

Löses ekv. (12) åter först med afseende på y^2, fås

$$y=\pm\sqrt{-\frac{k}{2}\pm\frac{\sqrt{-4m^2+k^2}}{2}}=\pm\sqrt{-\frac{k}{2}\pm\frac{i\sqrt{4m^2-k^2}}{2}}\cdot \tag{13*}$$

Uttrycken (13) och (13*) äro således parvis identiska. Huru tecknen skola tagas, synes säkrast, om värdena kvadreras och jämföras.

Vidare är klart, att, då man kan lösa dylika reciproka ekvationer på två sätt, man också bör kunna lösa den ena af de uppkommande ekvationerna, om man kan lösa den andra. Häraf begagnar man sig faktiskt vid lösningen af den allmänna 3:dje grads ekv. Man ser nämligen genast, att ekv.

$$u^6+qu^3-\frac{p^3}{27}=0\,, \tag{14}$$

som genom substitutionen $u=v\sqrt{-\frac{p}{3}}$ kan återföras till reciprok, blir oförändrad, om u bytes mot $-\frac{p}{3u}$. Löses ekv. såsom kvadratisk i afseende på u^3, fås

$$\left.\begin{aligned} u&=\varepsilon\,.\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\ -\frac{p}{3u}&=\varepsilon^2\,.\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{24}}} \end{aligned}\right\}, \tag{15}$$

där de öfre tecknen gälla samtidigt, de undre samtidigt samt ε betecknar en af de tre kubikrötterna ur enheten. Dividerar man åter i ekv. (14) med u^3 och inför

$$x=u-\frac{p}{3u}, \tag{16}$$

erhålles

$$x^3+px+q=0\,, \tag{17}$$

hvars tre rötter på grund af (15) och (16) äro

$$x=\varepsilon\,.\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\varepsilon^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,. \tag{18}$$

Det är gifvet, att denna metod med uppdelning i tvänne faktorer, hvilken redan Cartesius använde för lösningen af den allmänna 4:de grads ekv., jämväl kan generaliseras och brukas vid lösandet af högre graders synmetriska ekvationer. Vid den synmetriska ekv. af 8:de graden,

$$x^8+px^7+qx^6+rx^5+sx^4+rx^3+qx^2+px+1=0\,, \tag{19}$$

kunna rötterna grupperas så — vi förutsätta för enkelhets[1]) skull en af rötterna imaginär med absoluta beloppet olika enheten — att både konjugatkomplexer och inversa rötter sammanföras, således rötter af formen (4). De öfriga må vara

$$x_5\,,\, x_6\,,\, x_7=\frac{1}{x_5}\,,\, x_8=\frac{1}{x_6}\,. \tag{20}$$

Om då i enlighet med Cartesii metod vänstra membrum skrifves lika med produkten

$$(x^4+p_1x^3+q_1x^2+p_1x+1)\;(x^4+p_2x^4+q_2x^2+p^2x+1)\,, \tag{21}$$

och vi däri antaga, att $x_1\,,\, x_2\,,\, x_3\,,\, x_4$ äro nollställena till den första parantesen, $x_5\,,\, x_6\,,\, x_7\,,\, x_8$ till den andra, så är det a priori klart, att samtliga koefficienter blifva reella tal. De erhållas af

$$\left.\begin{aligned} p_1+p_2&=p\\ p_1\,p_2+q_1+q_2&=q\\ p_1+p_2+p_1\,q_2+p_2\,q_1&=r\\ 2+2\,p_1\,p_2+q_1\,q_2&=s \end{aligned}\right\}, \tag{22}$$

hvaraf

$$\left.\begin{aligned} p_1&=\frac{p}{2}+u\\ p_2&=\frac{p}{2}-u\\ q_1&=\frac{q}{2}-\frac{p^2}{8}+\frac{u^2}{2}-v\\ q_2&=\frac{q}{2}-\frac{p^2}{8}+\frac{u^2}{2}-v\,, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

där u och v bestämmas af

$$\left.\begin{aligned} p\left(\frac{q}{2}-\frac{p^2}{8}+\frac{u^2}{2}\right)-2uv&=v-p\\ \left(\frac{q}{2}-\frac{p^2}{8}+\frac{u^2}{2}\right)^2-v^2&=s-2-p^2+2u^2, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

[1]) **Detta antagande har naturligtvis ingen väsentlig betydelse!**

som, om vi sätta

$$u^2=t\,, \tag{25}$$

ger

$$\left(\frac{q}{2}-\frac{p^2}{8}+\frac{t}{2}\right)^2-\frac{1}{4t}\left(\frac{pq}{2}-\frac{p^3}{8}-r+p+\frac{pt}{2}\right)^2=s-2-\frac{p^2}{2}+2t\,. \tag{26}$$

Denna ekv., som i allmännhet är af 3:dje graden, ger värdena på u, hvarefter v fås ur (24^{I}) och koefficienterna p_1, p_2, q_1, q_2 ur (23).

Då man naturligtvis dessutom kan erhålla lösningen genom division med x^4 i ekv. (19), är det tydligt, att man bör kunna komma fram till en del identiteter mellan vissa radikaluttryck. Vill här endast behandla det enkla fall, då

$$p=r=0 \tag{27}$$

och ekv. (19) öfvergår i

$$x^8+qx^6+sx^4+qx^2+1=0\,. \tag{28}$$

Löses här i afseende på x^2, efter division med x^4, erhålles

$$x=\pm\sqrt{-\frac{q}{4}\pm\frac{\sqrt{q^2+8-4s}}{4}\pm\sqrt{\frac{q^2-4-2s\mp q\sqrt{q^2+8-4s}}{8}}}\,, \tag{29}$$

där de öfre tecknen tagas samtidigt och de undre samtidigt framför de termer, som innehålla $\sqrt{q^2+8-4s}$ som faktor, men tecknen för öfrigt varieras på alla möjliga sätt.

Bestämmes t ur ekv. (26), får man

$$t=4-q\pm\sqrt{8-8q+4s}\,. \tag{30}$$

Vidare är

$$v=0\,, \tag{31}$$

hvaraf

$$\left.\begin{aligned} p_1=-p_2&=\sqrt{4-q\pm2\sqrt{2-2q+s}} \\ q_1=q_2&=2\pm\sqrt{2-2q+s}\,, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

och de åtta rötterna äro således

$$x = \pm \frac{\sqrt{4-q\pm 2\sqrt{2-2q+s}}}{4} \pm \frac{\sqrt{4-q\mp 2\sqrt{2-2q+s}}}{4} \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{-2q-8\mp 2\sqrt{q^2+8-4s}}}{4},$$

eller, om man reducerar med hjälp af formeln

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-6}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-6}}{2}},$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{8-2q\pm 2\sqrt{q^2+8-4s}} \pm \sqrt{-8-2q\pm 2\sqrt{q^2+8-4s}}}{4}. \qquad (29^*)$$

Här skola tecknen tagas lika framför $2\sqrt{q^2+8-4s}$ men för öfrigt varieras på alla tänkbara sätt. Uttrycken (29) och (29*) böra då parvis vara identiska, om tecknen bestämmas riktigt, hvilket bäst sker genom kvadrering och jämförelse.

Ex. $$\sqrt{\sqrt{29}-1+\sqrt{14-2\sqrt{29}}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{29}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{29}-5}{2}}.$$

På samma sätt, som man erhåller lösningen af 3:dje gradsekvationen af en synmetrisk ekv., kan man äfven lösa den allmänna 4:de gradsekvationen. Om vi i (19) dividera med x^4 och införa

$$y = x + \frac{1}{x}, \qquad (33)$$

få vi

$$y^4 + py^3 + (q-4)y^2 + (r-3p)y + 2 - 2q + s = 0, \qquad (34)$$

d. v. s. om

$$y^4 + Py^3 + Qy^2 + Ry + S = 0 \qquad (35)$$

skall lösas, blifva rötterna de fyra summorna af två reciproka rötter till (21), då man har att skrifva i (22)—(26) talen P, $Q+4$, $R+3$, $S+2Q+6$ i stället för p, q, r, s resp.